

# Étude Bibliographique

**Nom de Projet :**PIF

**Auteur :** Fida BEN ABDALLAH

**Révision :** A

---

**Coordinateur scientifique :**

---

**Université de Lorraine : Laboratoire LERMAB**

M. Pierre-Jean MEAUSOONE

M. Anis BOUALI

---



## Table des matières

<b>1 Paramètres et Notations</b>	<b>3</b>
<b>2 Géométrie d'un véhicule</b>	<b>5</b>
2.1 Représentation d'un véhicule . . . . .	5
2.2 Géométrie directionnelle d'Ackermann . . . . .	5
2.3 Caractéristiques et Mesures . . . . .	7
2.3.1 Vitesses tangentielles . . . . .	7
2.3.2 Angle de dérive . . . . .	7
<b>3 Cinématique d'un Véhicule</b>	<b>8</b>
3.1 Modèle bicyclette cinématique . . . . .	9
3.2 Modèle cinématiques étendu par rapport à une trajectoire de référence .	10
3.3 Modèle cinématiques étendu dans le repère absolu . . . . .	10
<b>4 Dynamique d'un Véhicule</b>	<b>12</b>
4.1 Modèle dynamique simplifié (commande) . . . . .	12
4.1.1 Hypothèse générales du modèle bicyclette . . . . .	12
4.1.2 Modèle bicyclette dynamique . . . . .	13
4.2 Modèle dynamique complet (simulation) . . . . .	14
4.2.1 Modélisation de la liaison pneumatique/chaussée . . . . .	14
4.2.2 Modélisation de la dynamique des roues . . . . .	18
4.2.3 Modélisation du châssis : Dynamique verticale . . . . .	19
4.2.4 Modélisation du châssis : Dynamique longitudinale et latérale . .	24

## 1 Paramètres et Notations

Les tableaux suivant représentent les notations et les paramètres utilisés dans ce rapport.

	Symbole	Description
Indice 1	$x$	L'axe X
	$y$	L'axe Y
	$z$	L'axe Z
Indice 2	$f$	Roue frontale
	$r$	Roue arrière
	$f_l$	Roue frontale gauche
	$f_r$	Roue frontale droite
	$r_l$	Roue arrière gauche
	$r_r$	Roue arrière droite
	$G$	Centre de gravité
Indice 2	$res$	Force résistance au roulement
	$aero$	Force aérodynamique

### Variables

- $v_x$  : vitesse longitudinale
- $v_y$  : vitesse latérale
- $x, y$  : position du véhicule
- $\psi$  : angle de lacet de véhicule
- $\delta$  : angle de braquage
- $\beta$  : angle de dérive global
- $\alpha$  : angle de dérive
- $\omega$  : vitesse de rotation angulaire de la roue
- $F$  : force appliquée
- $\Gamma$  : Couple appliqué

### Paramètres véhicule

- $m$  : masse véhicule (kg)



- 
- $I_z$  : moment d'inertie autour de l'axe  $Z$
  - $L$  : Empattement (longueur) du véhicule (m)
  - $l_w$  : Largeur du véhicule (m)
  - $h$  : hauteur du véhicule (m)
  - $l_f$  : distance entre l'essieu avant et le centre de gravité du véhicule (m)
  - $l_r$  : distance entre l'essieu arrière et le centre de gravité du véhicule (m)
  - $t_f$  : demi voie (largeur) avant du véhicule (m)
  - $t_r$  : demi voie (largeur) arrière du véhicule (m)

**Paramètres roue**

- $J$  : moment d'inertie de la roue
- $R_{eff}$  : rayon de la roue avant (arrière)

## 2 Géométrie d'un véhicule

### 2.1 Représentation d'un véhicule

On considère un véhicule muni de quatre roues motrices dont deux directrices à l'avant. La modélisation d'un véhicule se fait dans le plan. Les principaux repères utilisés partagent donc tous le même axe  $Z_0$ , perpendiculaire au plan  $(X_0, Y_0)$ . Le repère  $R_0 = (O, X_0, Y_0)$  est le repère sol ou absolu, supposé galiléen. Le repère égocentrique  $R_v = (G, X_v, Y_v)$  est le repère lié au véhicule. Son origine  $G$  correspond au centre de gravité du véhicule : l'axe  $X_v$  est dirigé vers l'avant du véhicule et l'axe  $Y_v$  pointe perpendiculairement vers la gauche du véhicule. Le repère  $R_v$  forme l'angle de lacet  $\psi$  avec le repère fixe de référence  $R_0$ . Enfin, le repère de Frenet  $R_c = (C, X_c, Y_c)$  est le repère lié à la route. Son origine  $C$  est la projection du centre de gravité du véhicule selon  $Y_v$  sur le centre de la trajectoire de référence avec  $X_c$  est tangent à la route en  $C$  et  $Y_c$  y est normal. Dans des cas particuliers, cette trajectoire est le centre de la voie.

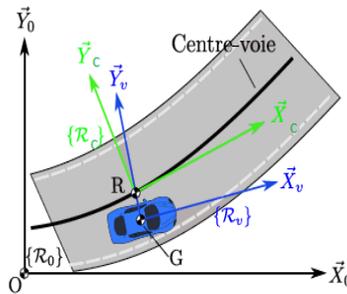


FIGURE 1 – Définition des repères de travail [4]

### 2.2 Géométrie directionnelle d'Ackermann

Considérons d'abord la figure 2 où une voiture effectue un virage à gauche à basse vitesse ( $< 5m/s$ ). Les forces latérales des pneus sont faibles et aucun glissement n'est présent. Cela se traduit par une condition cinématique entre les roues intérieures et extérieures qui permet de tourner à basse vitesse sans glisser. Il s'agit de la géométrie directionnelle d'Ackermann qui impose la condition suivante [1]

$$\cot \delta_r - \cot \delta_l = \frac{l_w}{L} \quad (1)$$

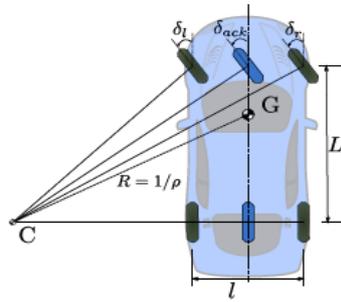


FIGURE 2 – L'angle d'Ackermann [4]

avec  $\delta_l$  est l'angle de braquage de la roue gauche, et  $\delta_r$  est l'angle de braquage de la roue droite.  $L$  et  $l_w$  représentent respectivement l'empattement et la voie (largeur) du véhicule. Cette condition, basé sur l'hypothèse du roulement sans glissement, impose que l'ensemble des axes de rotation des roues du véhicule se coupent au centre de courbure défini par un rayon de courbure  $R$  définie [3]

$$R = \sqrt{l_r^2 + L^2 \cot^2 \delta_{ack}} \quad (2)$$

avec  $\delta_{ack}$  est l'angle d'Ackermann. Il est défini par la cotangente des angles de braquage gauche  $\delta_l$  et droite  $\delta_r$

$$\delta_{ack} = \cot^{-1} \left( \frac{\cot \delta_r + \cot \delta_l}{2} \right) \quad (3)$$

En négligeant la largeur du véhicule  $l_w$  devant le rayon de braquage  $R$

$$\delta_{ack} = \arctan \frac{L}{R} \quad (4)$$

En faisant l'hypothèse des petits angles, les angles de braquage gauche et droite peuvent être estimés par

$$\delta_l = \frac{L}{R + t_f} \quad \delta_r = \frac{L}{R - t_r} \quad (5)$$

Sous l'hypothèse des petits angles et en négligeant la largeur du véhicule devant le rayon de braquage, l'angle d'Ackermann  $\delta_{ack}$  est la moyenne des angles de braquage avant

$$\delta_{ack} = \frac{\delta_r + \delta_l}{2} = \frac{2LR}{R^2 - t_f^2} \simeq \frac{L}{R} \quad (6)$$

A basse vitesse, l'angle d'Ackermann représente l'angle de braquage équivalent d'un modèle bicyclette ayant le même empattement  $L$  et le rayon de rotation  $R$ . En revanche, lorsque la vitesse augmente, la seule considération de l'angle d'Ackermann ne suffit plus car un glissement plus important est présent. Il est alors nécessaire de prendre en

considération les angles de dérives avant et arrière,  $\alpha_f$  et  $\alpha_r$  respectivement [6], car ils ne sont plus négligeables. L'angle total requis en régime permanent est

$$\delta_f = \delta_{ack} + \alpha_f - \alpha_r \quad (7)$$

## 2.3 Caractéristiques et Mesures

### 2.3.1 Vitesses tangentielles

Le centre de gravité du véhicule est positionné le long de l'axe de symétrie longitudinal par deux paramètres,  $l_f$  et  $l_r$  représentant respectivement les demi empattement avant et arrière. On note respectivement par  $t_f$  et  $t_r$  les demi voie avant et arrière. Les deux vitesses longitudinale et latérale au centre de gravité sont respectivement  $v_x$  et  $v_y$ . On note par  $\dot{\psi}$ , la vitesse de lacet. Pour déterminer la vitesse tangentielle des roues (contact pneu/sol), on utilise la géométrie du véhicule.

#### Vitesse longitudinale

$$\begin{cases} v_{xf_l} = v_x + t_f \dot{\psi} & ; & v_{xf_r} = v_x - t_f \dot{\psi} \\ v_{xr_l} = v_x + t_r \dot{\psi} & ; & v_{xr_r} = v_x - t_r \dot{\psi} \end{cases} \quad (8)$$

#### Vitesse latérale

$$\begin{cases} v_{yf_l} = v_y - l_f \dot{\psi} & ; & v_{yf_r} = v_y - l_f \dot{\psi} \\ v_{yr_l} = v_y - l_r \dot{\psi} & ; & v_{yr_r} = v_y - l_r \dot{\psi} \end{cases} \quad (9)$$

### 2.3.2 Angle de dérive

**2.3.2.1 Angle de dérive total** L'angle de dérive total du véhicule  $\beta$  est l'angle entre le vecteur vitesse du véhicule  $v$  et l'axe longitudinal ( $X_v$ ). De façon similaire aux angles de dérives des pneumatiques, on peut le définir par rapport à la vitesse du véhicule (hypothèse des petits angles)

$$\beta = \frac{v_y}{v_x} \quad (10)$$

avec  $v_x$  et  $v_y$  sont respectivement la vitesse longitudinale et latérale du véhicule.

**2.3.2.2 Angle de dérive des roues** L'angle de dérive est le ratio entre les vitesses latérale  $v_{yf_l}$  ( $v_{yf_r}$ ,  $v_{yr_l}$ ,  $v_{yr_r}$ ) et longitudinale  $v_{xf_l}$  ( $v_{xf_r}$ ,  $v_{xr_l}$ ,  $v_{xr_r}$ ) du pneumatique considéré,



TABLE 1 – Variables du modèle cinématique

Variables	Description
$v, v_x, v_y$	Le vecteur vitesse du véhicule au centre de gravité. On définit alors les vitesses longitudinale $v_x$ et latérale $v_y$ du véhicule par : $v = v_x X_v + v_y Y_v$ .
$v_f, v_r$	La vitesse de déplacement des pneumatiques avant et arrière.
$(x_g, y_g)$	La position du centre de gravité du véhicule dans le repère absolu.
$(x_r, y_r)$	La position du centre de l'essieu arrière dans le repère absolu.
$\psi$	L'angle de lacet du véhicule. Il est défini par l'angle $(X_0, X_v)$
$\dot{\psi}$	Vitesse de lacet du véhicule.
$s$	L'abscisse curviligne du véhicule. Elle représente la distance curviligne le long de trajectoire $T$ au point $M$ (le point de $T$ le plus proche de $R$ ).
$c(s)$	La courbure de trajectoire $T$ au point $M$ .
$y$	L'écart latéral du véhicule par rapport à la trajectoire $T$ . IL représente la distance algébrique entre $R$ et $M$ .
$\tilde{\psi}$	L'écart angulaire du véhicule par rapport à la trajectoire $T$ . Il est l'angle de lacet relatif défini par $(X_v, X_r)$
$\psi_{tan}$	L'orientation de la tangente à la trajectoire au point $M$ .
$\beta$	L'angle de dérive total du véhicule. Il est défini par l'angle $(X_v, v)$
$\alpha_f, \alpha_r$	L'angle de dérive avant et arrière de pneumatique.

### 3.1 Modèle bicyclette cinématique

Dans la littérature, le véhicule peut être modélisé par le modèle d'Ackermann ou modèle bicyclette. Ce modèle plan se caractérise par une représentation des quatre roues par une roue équivalente sur l'essieu avant et une sur l'essieu arrière. La roue avant virtuelle braque avec un angle équivalent noté  $\delta_f$ . La vitesse du véhicule  $v$  est définie au centre de gravité. L'angle de dérive total du véhicule  $\beta$  est l'angle entre le vecteur vitesse  $v$  et l'axe longitudinal  $(X_v)$ . Le modèle bicyclette cinématique est donné par les équations suivantes (14).

$$\begin{cases} \dot{x}_g = v \cos(\psi + \beta) \\ \dot{y}_g = v \sin(\psi + \beta) \\ \dot{\psi} = \frac{v \cos \beta}{L} \tan \delta_f \end{cases} \quad (14)$$

avec

$$\beta = \tan^{-1} \left( \frac{l_r \tan \delta_f}{L} \right)$$

$$— v \cos \beta = \frac{v_f \cos \delta_f + v_r}{2}$$

Le modèle bicyclette, utilisé pour de faibles vitesses ( $< 5m/s$ ), considère généralement que la condition de roulement sans glissement est satisfaite (angle de dérive nul  $\alpha_r$  et  $\alpha_f$ ).

### 3.2 Modèle cinématiques étendu par rapport à une trajectoire de référence

En milieu naturel, la condition de roulement sans glissement n'est pas valable car elle introduit une erreur de suivi lorsque la stratégie de contrôle utilisée est basée sur une telle hypothèse. Pour prendre en compte des conditions de glissement non idéales dans le modèle, deux variables supplémentaires  $\alpha_f$  et  $\alpha_r$  sont ajoutées. Ces angles de dérive sont représentatifs du phénomène de glissement latéral du robot.

Pour suivre une trajectoire définie au préalable, les variables d'état cinématiques du robot sont définies dans le repère de Frénet  $R_c$  de la façon suivante

- $s$  : L'abscisse curviligne du véhicule. Elle représente la distance curviligne le long de trajectoire  $T$  au point  $M$  (le point de  $T$  le plus proche de  $C$ ).
- $y$  : L'écart latéral du véhicule par rapport à la trajectoire  $T$ . IL représente la distance algébrique entre  $C$  et  $M$ .
- $\tilde{\psi}$  : L'écart angulaire du véhicule par rapport à la trajectoire  $T$ . Il est l'angle de lacet relatif défini par  $(X_v, X_r)$ .

Le modèle cinématique étendu par rapport à une trajectoire de référence en présence des glissements est [7]

$$\begin{cases} \dot{s} = v \frac{\cos(\tilde{\psi} + \alpha_r)}{1 - c(s)y} \\ \dot{y} = v \sin(\tilde{\psi} + \alpha_r) \\ \dot{\tilde{\psi}} = \dot{\psi} - \dot{\psi}_{\tan} = v \cos \alpha_r \frac{\tan(\delta_f - \alpha_f) - \tan \alpha_r}{L} - v \frac{c(s) \cos(\tilde{\psi} + \alpha_r)}{1 - c(s)y} \end{cases} \quad (15)$$

avec  $c(s)$  est la courbure de trajectoire  $T$  au point  $M$ . Ce modèle étendu est un complément au modèle cinématique et possède les angles de dérive  $\alpha_f$  et  $\alpha_r$  défini

$$\begin{cases} \alpha_f = \arctan\left(\tan \beta + \frac{l_f \dot{\psi}}{v_c \cos \beta}\right) - \delta_f \\ \alpha_r = \arctan\left(\tan \beta + \frac{l_r \dot{\psi}}{v_c \cos \beta}\right) \end{cases} \quad (16)$$

### 3.3 Modèle cinématiques étendu dans le repère absolu

On peut aussi définir la position du robot dans le repère absolu en remplaçant  $[s, y]$  par

- $x_r$  : L'abscisse du centre de l'essieu arrière dans le repère absolu
- $y_r$  : L'ordonnée du centre de l'essieu arrière dans le repère absolu

Les équations du mouvement pour le modèle cinématique étendu dans le repère absolu sont régies par le système d'équations [7]

$$\begin{cases} \dot{x}_r = v \cos(\psi + \alpha_r) \\ \dot{y}_r = v \sin(\psi + \alpha_r) \\ \dot{\psi} = v \cos \alpha_r \frac{\tan(\delta_f - \alpha_f) - \tan \alpha_r}{L} \end{cases} \quad (17)$$

## 4 Dynamique d'un Véhicule

Si le véhicule évolue à vitesse moyenne ou élevée ou encore sur des terrains très inclinés, les phénomènes dynamiques ne peuvent pas être négligés. Pour aller plus loin, un modèle basé sur le comportement dynamique du véhicule est pris en compte. Les modèles dynamiques tridimensionnels de véhicule sont les plus réalistes mais pour des raisons de complexité, ceux-ci ne sont utilisés que pour la validation par simulation.

Dans une démarche d'analyse et de synthèse, ces modèles sont alors simplifiés pour ne garder que les dynamiques prédominantes du système à l'étude. Par exemple, le modèle bicyclette est le plus utilisé pour la génération de trajectoire et l'élaboration des lois de commande pour le contrôle de véhicule. La communauté utilise généralement un modèle  $2D$ , négligeant alors la dynamique verticale, le roulis et le tangage, mais aussi tout transfert de masse. Ces différents phénomènes seront perçus alors comme des perturbations par le système qui devra être réglé de façon à être robuste.

### 4.1 Modèle dynamique simplifié (commande)

Le modèle véhicule décrit est un modèle dynamique linéaire, communément appelé modèle bicyclette. Ce modèle plan est composé d'une roue virtuelle au centre de l'essieu arrière distante de  $L$  (empattement) et d'une seconde au centre de l'essieu avant. On note par  $\delta_f$  l'angle de braquage avant.

#### 4.1.1 Hypothèses générales du modèle bicyclette

Pour pouvoir dériver le modèle « bicyclette » dynamique, nous devons faire plusieurs hypothèses :

- **(H1)** : La route est considérée plane (sans dévers) et uniforme (revêtement sans défaut), ainsi la répartition de charge sur les roues est donc supposée constante.
- **(H2)** : L'accélération du véhicule (en traction et en freinage) est suffisamment faible pour que les mouvements des suspensions soient supposés négligeables.
- **(H3)** : Pas de débattement de la suspension (pas de modification de la voie ou de la géométrie des roues)
- **(H4)** : Le comportement des roues d'un même essieu est similaire, ainsi la dynamique des roues d'un même essieu peut être décrite par une roue virtuelle située au centre de gravité de l'essieu.
- **(H5)** : Le système est contrôlé en position (le mouvement du véhicule est contraint par la direction, l'entrée de notre système est l'angle du volant)
- **(H6)** : On se place dans l'approximation des petits angles de dérive pour des conditions normale d'utilisation.

Les hypothèses **(H1)** et **(H2)** permettent de négliger les dynamiques du roulis et du tangage. Ainsi le modèle dynamique a trois degrés de liberté

- L'accélération longitudinale  $\dot{v}_x$  (translation suivant l'axe  $X_v$ )
- L'accélération latérale  $\dot{v}_y$  (translation suivant l'axe  $Y_v$ )

— L'accélération de lacet  $\ddot{\psi}$  (rotation suivant l'axe Z)

Seules les forces développées aux pneumatiques et celle de résistante au roulement seront prises en compte dans cette partie.

— Force pneumatique longitudinale projetées sur  $X_v$  :  $F_{tx_f}$  et  $F_{tx_r}$

— Force pneumatique latérale projetées sur  $Y_v$  :  $F_{ty_f}$  et  $F_{ty_r}$

L'hypothèse **(H6)** permet d'avoir des forces latérales aux pneumatiques proportionnelles à l'angle de dérive :

$$F_{ty_f} = C_{\alpha_f}(\delta_f - \theta_f) \quad F_{ty_r} = -C_{\alpha_r}\theta_r \quad (18)$$

#### 4.1.2 Modèle bicyclette dynamique

Appliquons le Principe Fondamental de la Dynamique au centre du gravité du véhicule, les équations du mouvement sont

$$\begin{cases} m(\dot{v}_x - v_y\dot{\psi}) = F_{tx_f} + F_{tx_r} \\ m(\dot{v}_y + v_x\dot{\psi}) = F_{ty_f} + F_{ty_r} \\ I_z\ddot{\psi} = l_f F_{ty_f} - l_r F_{ty_r} \end{cases} \quad (19)$$

avec  $m$  et  $I_z$  désignent, respectivement la masse totale du véhicule et son inertie de lacet. Afin de guider correctement le véhicule, les états seront définis par rapport à une trajectoire de référence. Cette trajectoire est définie grâce aux dynamiques de  $y$  et de  $\tilde{\psi}$ , qui s'écrivent de la façon suivante

$$\begin{cases} \dot{y} = v_y + v_x\tilde{\psi} \\ \dot{\tilde{\psi}} = \dot{\psi} - v_x \end{cases} \quad (20)$$

En combinant les équations, les dynamiques de  $\tilde{\psi}$  et de  $\dot{y}$  sont alors obtenues

$$\begin{cases} \ddot{\tilde{\psi}} = \frac{-(C_f l_f^2 + C_r l_r^2)}{I_z v_x} \dot{\tilde{\psi}} + \frac{(C_f l_f - C_r l_r)}{I_z} \tilde{\psi} + \frac{-(C_f l_f - C_r l_r)}{I_z v_x} \dot{y} + \frac{C_f l_f}{I_z} \delta \\ \ddot{y} = \frac{-C_f l_f + C_r l_r}{m v_x} \dot{\tilde{\psi}} + \frac{C_f + C_l}{m} \tilde{\psi} + \frac{-(C_f + C_l)}{m v_x} \dot{y} + \frac{C_f}{m} \delta - v_x^2 \rho \end{cases} \quad (21)$$

Il existe une autre forme du modèle bicyclette équivalente qui fait intervenir l'angle de dérive total  $\beta$  du véhicule à la place de la vitesse latérale. Avec ces états, la dynamique du véhicule devient

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = \frac{-(C_f l_f^2 + C_r l_r^2)}{I_z v_x} \dot{\psi} + \frac{(C_r l_r - C_f l_f)}{I_z} \beta + \frac{C_f l_f}{I_z} \delta \\ \dot{\beta} = \left(-1 + \frac{C_r l_r - C_f l_f}{m v_x^2}\right) \dot{\psi} - \frac{C_f + C_r}{m v_x} \beta + \frac{C_f}{m v_x} \delta \end{cases} \quad (22)$$

La représentation d'état sous force  $\dot{x} = Ax + Bu$  est

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{C_f + C_r}{m v_x} & -1 + \frac{C_r l_r - C_f l_f}{m v_x^2} \\ \frac{(C_r l_r - C_f l_f)}{I_z} & \frac{-(C_f l_f^2 + C_r l_r^2)}{I_z v_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \psi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{C_f l_f}{I_z} \\ \frac{C_f}{m v_x} \end{bmatrix} \delta_f \quad (23)$$

## 4.2 Modèle dynamique complet (simulation)

Les modèles dynamiques tiennent compte de l'interaction chaussée-véhicule. Selon les besoins et les capacités de calcul, il est possible d'interconnecter différents sous-systèmes représentant chacun un modèle dynamique d'un organe du véhicule : suspension, freins, moteur, pneumatique, etc. Dans cette section, on représente les principaux modèles de ces sous-systèmes.

### 4.2.1 Modélisation de la liaison pneumatique/chaussée

La modélisation des forces du contact pneumatique/chaussée est assez complexe. De très nombreux modèles existent dans la littérature, on peut citer : modèle linéaire, le modèle de Dugoff, modèle de Pacejka et le modèle de Rill (TMeasy).

On suppose que le pneu reste toujours posé sur le sol et que son inclinaison est nulle (le pneu reste vertical). Ainsi, on peut définir les 4 degrés de liberté du chaque pneu, à titre d'exemple pour la roue arrière

- La vitesse longitudinale tangentielle  $v_{xr}$  (translation suivant l'axe X)
- La vitesse latérale  $v_{yr}$  (translation suivant l'axe Y)
- La vitesse angulaire de roulement  $\omega_r$  (rotation autour de l'axe Y)
- La vitesse de lacet  $\gamma$  (rotation autour de l'axe Z)

#### 4.2.1.1 Modèle linéaire

**Comportement longitudinal du pneumatique :** Le glissement longitudinal est dû à la différence entre la vitesse de translation du centre de la roue et de celle de son point de contact avec le sol [2]. On note  $v_{xr}$  la vitesse linéaire de translation du point de contact de la roue avec la route,  $\omega_r$  la vitesse angulaire de rotation de la roue et  $R_{eff}$  le rayon de roulement. L'expression du glissement longitudinal est

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{R_{eff}\omega_r - v_{xr}}{v_{xr}} & \text{Acceleration} \\ \sigma_r = \frac{R_{eff}\omega_r - v_{xr}}{R_{eff}\omega_r} & \text{Freinage} \end{cases} \quad (24)$$

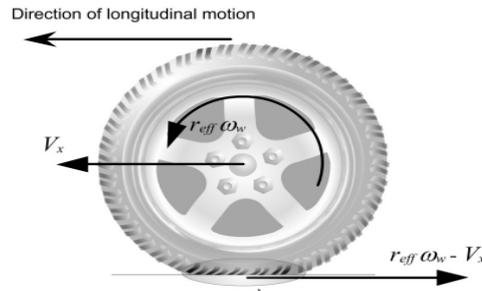


FIGURE 4 – Glissement longitudinal [2]

Si on généralise pour les quatre roues, on aura

$$\begin{cases} \sigma_{f_l} = \frac{R_{eff}\omega_{f_l} - v_{xf_l}}{v_{xf_l}} & ; & \sigma_{f_r} = \frac{R_{eff}\omega_{f_r} - v_{xf_r}}{v_{xf_r}} \\ \sigma_{r_l} = \frac{R_{eff}\omega_{r_l} - v_{xr_l}}{v_{xr_l}} & ; & \sigma_{r_r} = \frac{R_{eff}\omega_{r_r} - v_{xr_r}}{v_{xr_r}} \end{cases} \quad (25)$$

Pendant une conduite normale, le glissement longitudinal est faible et ne dépasse pas le seuil de 10%. La relation liant la force longitudinale et le glissement longitudinal est linéaire dans ce cas

$$F_{tx_f} = C_\sigma \sigma_{x_f} \quad F_{tx_r} = C_\sigma \sigma_{x_r} \quad (26)$$

avec  $C_\sigma$  en (N) est la rigidité longitudinale.

**Comportement latéral du pneumatique :** La force latérale (ou transversale) est nécessaire au guidage du véhicule. En fait, la surface de contact du pneumatique sur la chaussée tend à glisser dans le sens opposé de la sollicitation latérale (par exemple un braquage du volant). La déformation résultante de ce glissement crée un angle entre l'axe longitudinal de la roue et la direction de son mouvement défini par l'angle de dérive  $\theta_f$  tel que

$$\tan \theta_f = -\frac{v_{yf}}{v_{xf}} \quad \tan \theta_r = -\frac{v_{yr}}{v_{xr}} \quad (27)$$

Les deux angles de dérive locaux  $\alpha_f$  et  $\alpha_r$  sont définis par [5]

$$\alpha_f = \delta_f - \theta_f \quad \alpha_r = -\theta_r \quad (28)$$

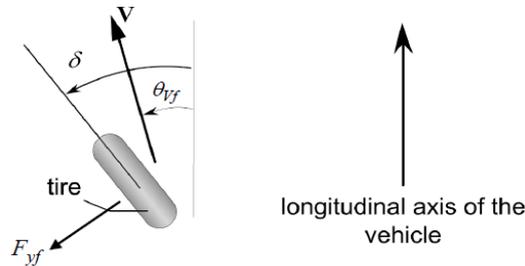


FIGURE 5 – Glissement latérale : angle de dérive [2]

Pour un angle de dérive négligeable, on a  $\tan \alpha \equiv \alpha$ . De manière analogue durant une conduite normale en virage, la dérive des pneumatiques reste faible (angles de dérive  $< 4$  deg). Les forces latérales dans ce cas peuvent être modélisées comme une fonction linéaire de la dérive

$$F_{ty_f} = C_{\alpha} \alpha_f \quad F_{ty_r} = C_{\alpha} \alpha_r \quad (29)$$

$$F_{ty_f} = C_{\alpha_f} (\delta_f - \theta_f) \quad F_{ty_r} = -C_{\alpha_r} \theta_r \quad (30)$$

Les rigidités longitudinale  $C_{\sigma}$  en (N) et latérale (de dérive)  $C_{\alpha_f}$  et  $C_{\alpha_r}$  en ( $Nm^{-1}$ ) dépendent de l'adhérence de la chaussée et de la charge verticale sur le pneumatique.

**4.2.1.2 Modèle de Rill** Dans des conditions de conduite plus agressives ou en cas de mauvaise adhérence, les deux relations (26) et (30) deviennent non linéaire

- Mouvement longitudinal : le pneumatique tend à patiner (lors d'une traction) ou à se bloquer (lors d'un freinage).
- Mouvement latéral : le pneumatique tend à sous-virer ou à survirer.

Le modèle de Rill est largement utilisé en simulation dans le contexte agricole. Il donne l'une des représentations les plus réalistes du comportement du pneumatique. Par la suite on utilise les mêmes notations de l'article [3]. L'expression du glissement longitudinal ( $s_x$ ), latéral ( $s_y$ ) et généralisé sont définis comme suit

$$\begin{cases} s_x = \frac{R_d \omega_r - v_{xr}}{R_d |\omega_r| + v_\varepsilon} \\ s_y = \frac{-v_{yr}}{R_d |\omega_r| + v_\varepsilon} \\ s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} \end{cases} \quad (31)$$

- $R_d$  le rayon dynamique de la roue
- $v_\varepsilon$  est une vitesse positive mais artificielle pour éviter les problèmes numériques (choisie égale à  $0.001 \text{ ms}^{-1}$ )

**Modèle statique :** L'extraction des forces latérale et longitudinale se fait par lecture numérique de courbes d'abaque, qui à un glissement fait correspondre une force, comme le présente la figure ci-dessous

$$\begin{cases} F_x = \cos \phi F = \frac{s_x}{s} F \\ F_y = \sin \phi F = \frac{s_y}{s} F \end{cases} \quad (32)$$

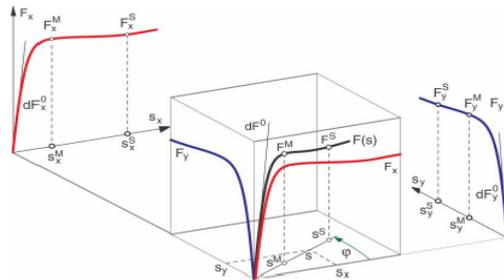


FIGURE 6 – Forces longitudinales et latérales en fonction du glissement [3]

La formule de la force du pneu généralisée :

$$F(s) = \begin{cases} \frac{s^M dF^0 \sigma}{1 + \sigma(\sigma + \frac{F^0 s^M}{F^M}) - 2} , & \sigma = \frac{s}{s^M} , & 0 \leq s \leq s^M \\ F^M - (F^M - F^G) \sigma^2 (3 - 2\sigma) , & \sigma = \frac{(s - s^M)}{s^G - s^M} , & s^M < s < s^G \\ F^G , & s > s^G \end{cases} \quad (33)$$

Les données caractéristiques des courbes suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} dF^0 = \sqrt{(dF_x^0 \widehat{s}_x \cos(\phi))^2 + (dF_y^0 \widehat{s}_y \sin(\phi))^2} \\ s^M = \sqrt{\left(\frac{s_x^M}{s_x} \cos(\phi)\right)^2 + \left(\frac{s_y^M}{s_y} \sin(\phi)\right)^2} \\ F^M = \sqrt{(F_x^M \widehat{s}_x \cos(\phi))^2 + (F_y^M \widehat{s}_y \sin(\phi))^2} \\ s^G = \sqrt{\left(\frac{s_x^G}{s_x} \cos(\phi)\right)^2 + \left(\frac{s_y^G}{s_y} \sin(\phi)\right)^2} \\ F^G = \sqrt{(F_x^G \widehat{s}_x \cos(\phi))^2 + (F_y^G \widehat{s}_y \sin(\phi))^2} \end{array} \right. \quad (34)$$

avec  $\cos \phi = \frac{s_x}{s}$  et  $\sin \phi = \frac{s_y}{s}$ . Pour calculer les différents paramètres, on procède comme suit :

$$F_x^M(F_z) = \frac{F_z}{F_z^N} \left[ 2F_x^M(F_z^N) - \frac{1}{2}F_x^M(2F_z^N) - \left( F_x^M(F_z^N) - \frac{1}{2}F_x^M(2F_z^N) \right) \frac{F_z}{F_z^N} \right] \quad (35)$$

$$s_x^M = s_x^M(F_z^N) + \left( s_x^M(2F_z^N) - s_x^M(F_z^N) \right) \left( \frac{F_z}{F_z^N} - 1 \right) \quad (36)$$

**Modèle dynamique :** Les forces  $F_x$  et  $F_y$  sont aussi fonctions des déformation dynamiques longitudinales ( $x_e$ ) et latérales ( $y_e$ ), ainsi on a le système d'équation différentielles suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} (r_d |\omega| \widehat{s}_x d_x + f_g) \dot{x}_e = -r_d |\omega| \widehat{s}_x c_x x_e - f_g (v_x - r_d \omega) \\ (r_d |\omega| \widehat{s}_y d_y + f_g) \dot{y}_e = -r_d |\omega| \widehat{s}_y c_y y_e - f_g v_y \end{array} \right. \quad (37)$$

#### 4.2.2 Modélisation de la dynamique des roues

Le modèle dynamique de la roue dépend principalement des couples résultants du moteur  $\Gamma_{D_{ij}}$  et du frein  $\Gamma_{B_{ij}}$ , de la force longitudinale du contact pneu/sol  $F_{x_{ij}}$  et du rayon de la roue  $R_{eff}$ . La dynamique de la rotation de chaque roues motrice est [1]

$$J_{ij} \dot{\omega}_{ij} = \Gamma_{D_{ij}} - \Gamma_{B_{ij}} - R_{eff} F_{t_{x_{ij}}} \quad (38)$$

avec  $J_{ij}$  est le moment d'inertie de chaque roue motrice du véhicule et  $\omega_{ij}$  représente la vitesse de rotation angulaire.

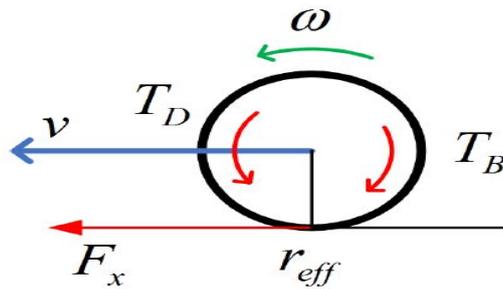


FIGURE 7 – Dynamique des roues

### 4.2.3 Modélisation du châssis : Dynamique verticale

**4.2.3.1 Modèle sans suspension :** La détermination de la répartition non-homogène de la masse totale du véhicule sur chaque pneumatique est une étape importante pour analyser le comportement dynamique du véhicule en virage [5]. En effet, la charge appliquée sur chaque pneumatique détermine les forces maximales disponibles en longitudinal et en latéral. La figure (8) présente cette répartition.

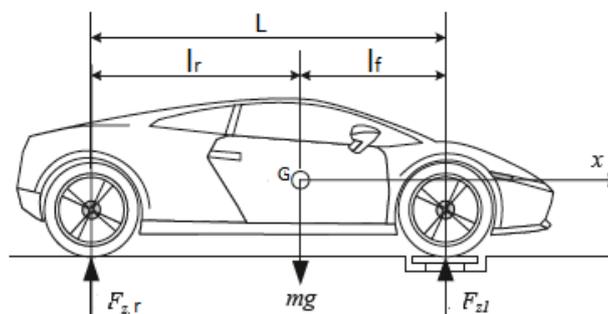


FIGURE 8 – Répartition non-homogène de la masse totale du véhicule [5]

**Répartition charge en longitudinal :** La dynamique verticale d'un véhicule en mouvement longitudinal ayant une accélération  $a_x$  :

$$\begin{cases} \sum F_x = F_{tx_f} + F_{tx_r} = ma_x \\ \sum F_z = F_{z_f} + F_{z_r} - mg = 0 \\ \sum M_y = -l_f F_{z_f} + l_r F_{z_r} - h(F_{tx_f} + F_{tx_r}) = 0 \end{cases} \quad (39)$$

avec  $m$  est la masse du véhicule. On note par  $L = l_f + l_r$ , l'empattement et  $h$  l'hauteur du véhicule.  $a_x$  est l'accélération longitudinale, on obtient ainsi

$$\begin{cases} F_{zf} = mg \frac{l_r}{L} - \frac{h}{L} m a_x \\ F_{zr} = mg \frac{l_f}{L} + \frac{h}{L} m a_x \end{cases} \quad (40)$$

**Répartition charge en latéral :** La dynamique verticale d'un véhicule ayant une accélération latérale  $a_y$  :

$$\begin{cases} \sum F_y = F_{ty_{fl}} + F_{ty_{fr}} = m^* a_y \\ \sum F_z = F_{z_{fl}} + F_{z_{fr}} - m^* g = 0 \\ \sum M_x = t_{f_l} F_{z_{fl}} - t_{f_r} F_{z_{fr}} + h(F_{ty_{fl}} + F_{ty_{fr}}) = 0 \end{cases} \quad (41)$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{cases} F_{z_{fl}} = m^* g \frac{t_{f_r}}{t_{f_r} + t_{f_l}} - \frac{h}{t_{f_r} + t_{f_l}} m^* a_y \\ F_{z_{fr}} = m^* g \frac{t_{f_l}}{t_{f_r} + t_{f_l}} + \frac{h}{t_{f_r} + t_{f_l}} m^* a_y \end{cases} \quad (42)$$

Sachant que  $m^* = \frac{F_{z_f}}{g}$  et on note respectivement par  $e_f$  et  $e_r$  la voie avant et arrière du véhicule avec  $t_{f_l} = t_{f_r} = \frac{e_f}{2}$ , on obtient ainsi

$$\begin{cases} F_{z_{fl}} = \frac{1}{2} m^* g - \frac{h}{e_f} m^* a_y \\ F_{z_{fr}} = \frac{1}{2} m^* g + \frac{h}{e_f} m^* a_y \end{cases} \quad (43)$$

**Répartition charge en mouvement longitudinal et latéral :** Les efforts verticaux dépendent de la masse du véhicule et de sa répartition. Sachant l'accélération longitudinale  $a_x$  et latérale  $a_y$ , les forces verticales d'un véhicule sont calculées par les équations suivantes

$$\begin{cases} F_{z_{fl}} = \frac{1}{2} m \left( \frac{l_r}{L} g - \frac{h}{L} a_x \right) - m \left( \frac{l_r}{L} g - \frac{h}{L} a_x \right) \frac{h}{e_f g} a_y \\ F_{z_{fr}} = \frac{1}{2} m \left( \frac{l_r}{L} g - \frac{h}{L} a_x \right) + m \left( \frac{l_r}{L} g - \frac{h}{L} a_x \right) \frac{h}{e_f g} a_y \\ F_{z_{rl}} = \frac{1}{2} m \left( \frac{l_f}{L} g + \frac{h}{L} a_x \right) - m \left( \frac{l_f}{L} g + \frac{h}{L} a_x \right) \frac{h}{e_r g} a_y \\ F_{z_{rr}} = \frac{1}{2} m \left( \frac{l_f}{L} g + \frac{h}{L} a_x \right) + m \left( \frac{l_f}{L} g + \frac{h}{L} a_x \right) \frac{h}{e_r g} a_y \end{cases} \quad (44)$$

Dans le cas où  $m^* = \frac{ml_r}{L}$ , on aura les équations suivantes sans les termes de couplage

$$\begin{cases} F_{z_{fl}} = mg \frac{l_r}{2L} - m \frac{h}{2L} a_x - m \frac{l_r h}{e_f L} a_y \\ F_{z_{fr}} = mg \frac{l_r}{2L} - m \frac{h}{2L} a_x + m \frac{l_r h}{e_f L} a_y \\ F_{z_{rl}} = mg \frac{l_f}{2L} + m \frac{h}{2L} a_x - m \frac{l_f h}{e_f L} a_y \\ F_{z_{rr}} = mg \frac{l_f}{2L} + m \frac{h}{2L} a_x + m \frac{l_f h}{e_f L} a_y \end{cases} \quad (45)$$

**4.2.3.2 Modèle avec suspension :** L'élément de suspension doit gérer le compromis entre l'isolation vibratoire de la caisse (confort) et l'écrasement du pneu (tenu de route). Dans le cadre des suspensions "classique", nous distinguons trois types :

- Suspension passif : est équipée d'un ressort et d'un amortisseur. Le ressort fournit une force qui dépend de l'écart de position entre la caisse et la roue (Force/Position). En revanche, l'amortisseur dissipe de l'énergie en produisant une force qui s'oppose à la vitesse relative entre la caisse et la roue (Force/Vitesse).
- Suspension semi-actif : est constituée d'un élément passif, assimilé à un ressort et d'un amortisseur semi-actif. La force développée par l'amortisseur dépend de sa caractéristique Force/Vitesse. Mais contrairement à un amortisseur passif, cette force est module.
- Suspension actif : contrairement à une suspension passif ou semi-actif, les suspension actives permet, en faisant varier à l'aide d'une pompe, la pression du fluide dans la suspension hydraulique, de générer une force indépendante des positions relatives de la caisse et de la roue.

Le choix d'un modèle de suspension de véhicule dépend des mouvements auxquels on s'intéresse. Le modèle le plus simple est le modèle dit *quart de véhicule*, qui ne prend en compte que le mouvement verticale de la caisse. Si on s'intéresse au mouvement vertical et au tangage, on choisira un modèle *demi véhicule* de type bicyclette qui permet de visualiser les reports de charge entre le train avant et le train arrière lors d'une accélération ou d'un freinage. Le modèle *complet à 7 ddl* prend en compte le mouvement vertical, le roulis et le tangage car il engendrent directement un débattement vertical des suspension.

**Modèle quart de véhicule :** Le modèle quart de véhicule à deux degré de liberté permet de prendre en compte le mouvement vertical de la caisse ainsi que de la roue. La masse suspendue (caisse) repose, par l'intermédiaire de la suspension, sur la masse non-suspendue (roue) qui repose elle même sur le sol par l'intermédiaire du pneumatique. Le véhicule est soumis à des perturbation routières qui agissent sur les roues modélisés ici par un ressort dont le coefficient de rigidité est  $k_t$ . On note :

- $m_s$  : la masse de la caisse (kg)
- $m_{us}$  : la masse de la roue (kg)
- $z_s$  : la position de la caisse (m)
- $z_{us}$  : la position de la roue (m)
- $z_r$  : le profil de la route
- $k$  : la raideur de la suspension
- $k_p$  : la raideur de pneumatique
- $c$  : coefficient d'amortissement de la suspension
- $c_p$  : coefficient d'amortissement de pneumatique

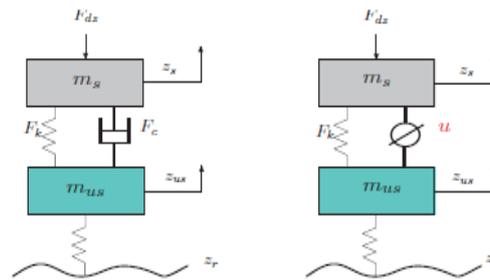


FIGURE 9 – Modèle quart de véhicule : passif (gauche) et contrôlé (droit) [5]

Le comportement dynamique vertical du quart de véhicule est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s = -(F_{sz} + F_{dz}) \\ m_{us} \ddot{z}_{us} = F_{sz} - F_{tz} \end{cases} \quad (46)$$

avec  $F_{tz}$  représente la force verticale du pneumatique et est considérée comme une fonction linéaire :

$$F_{tz} = k_t(z_{us} - z_r) + c_t(\dot{z}_{us} - \dot{z}_r) \quad (47)$$

où  $F_{sz}$  représente la force de suspension qui peut prendre 2 formes, en considérant la suspension passive et contrôlée, comme suit :

$$\begin{cases} F_{sz} = -F_k(z_s - z_{us}) + F_c(\dot{z}_s - \dot{z}_{us}) & (\text{suspension passive}) \\ F_{sz} = F_k(z_s - z_{us}) + u & (\text{suspension active}) \end{cases} \quad (48)$$

avec

- $F_k(\cdot)$  : une fonction linéaire ou non de la déformation en position  $z_{def} = z_s - z_{us}$ .
- $F_c(\cdot)$  : une fonction linéaire ou non de la déformation en vitesse  $\dot{z}_{def} = \dot{z}_s - \dot{z}_{us}$ .
- $F_{dz}$  : une force de perturbation verticale (qui peut être un transfert de charge).
- $u$  : caractériser le type de la suspension utilisée dans le véhicule quart
- si  $u = F_c(\dot{z}_s - \dot{z}_{us})$ , la suspension est passive

— si  $u = F_c(\dot{z}_s - \dot{z}_{us}, \Omega)$ , la suspension est semi-active dont  $\Omega$  est un paramètre d'entrée pour moduler l'amortissement.

—  $u$  est une fonction indépendante, la suspension est active.

Pour une suspension linéaire, on a  $F_k = k(z_s - z_{us})$  et  $F_c = c(\dot{z}_s - \dot{z}_{us})$ . Ainsi, le modèle linéaire de suspension orienté commande est :

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s = -k(z_s - z_{us}) - c(\dot{z}_s - \dot{z}_{us}) - u - F_{dz} \\ m_{us} \ddot{z}_{us} = k(z_s - z_{us}) + c(\dot{z}_s - \dot{z}_{us}) + u - k_t(z_{us} - z_r) \end{cases} \quad (49)$$

La représentation d'état associée est :

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_s \\ \ddot{z}_s \\ \dot{z}_{us} \\ \ddot{z}_{us} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k}{m_s} & \frac{-c}{m_s} & \frac{k}{m_s} & \frac{c}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k}{m_{us}} & \frac{c}{m_{us}} & \frac{-k-k_t}{m_{us}} & \frac{-c}{m_{us}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s \\ \dot{z}_s \\ z_{us} \\ \dot{z}_{us} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{m_s} \\ 0 \\ \frac{1}{m_s} \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{m_{us}} \end{bmatrix} z_r + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{-1}{m_s} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F_{dz} \quad (50)$$

**4.2.3.3 Modèle complet à 7 ddl :** Ce modèle comprend la dynamique verticale du châssis, les mouvements verticaux des roues et le tangage et le roulis, respectivement,  $z_c, z_{us_{ij}}, \theta$  et  $\phi$ . Les équations dynamiques sont :

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_g = -(F_{sz_f} + F_{sz_r} + F_{dz}) \\ m_{us_{ij}} \ddot{z}_{us_{ij}} = F_{sz_{ij}} - F_{tz_{ij}} \\ I_x \ddot{\theta} = (F_{sz_{rl}} - F_{sz_{rr}})t_r + (F_{sz_{fl}} - F_{sz_{fr}})t_f + mh\dot{\psi}_y \\ I_y \ddot{\phi} = F_{sz_f}l_f - F_{sz_r}l_r - mh\dot{\psi}_x \end{cases} \quad (51)$$

Sous les hypothèses suivantes :

- un châssis rigide
- des caractéristiques linéaires pour les ressorts et les amortisseurs
- des petits déplacement autour du point d'équilibre

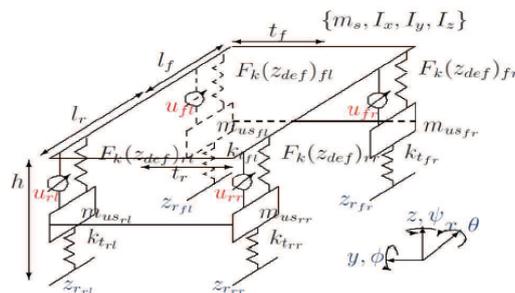


FIGURE 10 – Modèle complet à 7 ddl [5]

Le modèle complet à 7 ddl proposé par Park est linéaire et donné par :

$$\begin{cases} M_s \ddot{q} = TB_s(\dot{z}_u - \dot{z}_s) + TK_{sr}(z_u - z_s) + T f_a \\ M_{us} \ddot{z}_{usij} = B_s(\dot{z}_u - \dot{z}_s) + K_{ss}(z_u - z_s) + K_t(z_r - z_u) - f_a \end{cases} \quad (52)$$

avec

- $q = [z_g, \theta, \phi]^t$  : le déplacement vertical, le roulis et le tangage du châssis
- $z_{us} = [z_{us_{fl}}, z_{us_{fr}}, z_{us_{rl}}, z_{us_{rr}}]^t$  : le déplacement vertical de chaque roue (ou masse non suspendue).
- $z_s = [z_{s_{fl}}, z_{s_{fr}}, z_{s_{rl}}, z_{s_{rr}}]^t$  : le déplacement vertical de chaque coin du châssis (ou masse suspendue).
- $z_r = [z_{r_{fl}}, z_{r_{fr}}, z_{r_{rl}}, z_{r_{rr}}]^t$  : le profil de la route sous chaque roue.
- $f_a = [u_{fl}, u_{fr}, u_{rl}, u_{rr}]^t$  : les forces produites par chaque actionneur.

Les matrices utilisées sont les suivantes :

- $M_s = \text{diag}(m_s, I_x, I_y)$
- $M_{us} = \text{diag}(m_{us_{fl}}, m_{us_{fr}}, m_{us_{rl}}, m_{us_{rr}})$
- $B_s = \text{diag}(c_{fl}, c_{fr}, c_{rl}, c_{rr})$
- $K_{ss} = \text{diag}(k_{fl}, k_{fr}, k_{rl}, k_{rr})$
- $K_t = \text{diag}(k_{t_{fl}}, k_{t_{fr}}, k_{t_{rl}}, k_{t_{rr}})$

$$K_{sr} = \begin{bmatrix} k_{fl} + \frac{r_f}{2} & -\frac{r_f}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{r_f}{2} & k_f + \frac{r_f}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_r + \frac{r_r}{2} & -\frac{r_r}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{r_r}{2} & k_r + \frac{r_r}{2} \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -t_f & t_f & -t_r & t_r \\ -l_f & -l_f & l_r & l_r \end{bmatrix}$$

Les différents paramètres qui apparaissent dans les équations, sont définis ainsi :

- $m_s$  : masse suspendue
- $m_{us_{ij}}$  : masse de chaque roue (masse non suspendue)
- $I_x$  : moment d'inertie de roulis de la masse suspendue
- $I_y$  : moment d'inertie de tangage de la masse suspendue
- $c_{ij}$  : coefficient d'amortissement de chaque suspension
- $k_{ij}$  : raideur de chaque suspension
- $r_i$  : raideur de la barre anti-roulis avant et arrière
- $k_{t_{ij}}$  : raideur de pneumatique
- $t_f$  : moitié de la voie avant
- $t_r$  : moitié de la voie arrière
- $l_f$  : distance entre le CdG du châssis et l'essieu avant.
- $l_r$  : distance entre le CdG du châssis et l'essieu arrière.

#### 4.2.4 Modélisation du châssis : Dynamique longitudinale et latérale

Pour décrire le comportement du véhicule, différents modèles sont proposés dans la littérature avec des simplifications plus ou moins importantes, faites selon le besoin de l'application à concevoir. On distingue principalement deux modèles : Modèle bicyclette, déjà présenté, et Modèle 4 roues. Appliquons le Principe Fondamental de la

Dynamique au centre du gravité du véhicule, les équations des différentes dynamiques sont données par

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{v}_x = \frac{F_{ixf} \cos \delta_f - F_{ixr} + F_{iyf} \sin \delta_f + F_{d,x}}{m} + v_y \dot{\psi} \\
 \dot{v}_y = \frac{F_{ixf} \sin \delta_f - F_{iyf} + F_{iyf} \cos \delta_f + F_{d,y}}{m} - v_x \dot{\psi} \\
 \ddot{z}_g = -\frac{F_{szf} + F_{s_zr} + F_{dz}}{m_s} \\
 \ddot{\theta} = \frac{(F_{sz_{rl}} - F_{sz_{rr}})t_r + (F_{sz_{fl}} - F_{sz_{fr}})t_f + mh\dot{v}_y + M_{d,x}}{I_x} \\
 \ddot{\phi} = \frac{F_{sz_f}l_f - F_{sz_r}l_r - mh\dot{v}_x + M_{d,y}}{I_y} \\
 \ddot{\psi} = \frac{l_f(F_{ixf} \sin \delta_f + F_{iyf} \cos \delta_f) - l_r F_{iyr} + (F_{ix_{fr}} + F_{iy_{fl}})t_f \cos \delta_f}{I_z} + \frac{t_f(F_{ix_{rr}} - F_{iy_{rl}}) + (F_{ix_{fl}} + F_{iy_{fr}})t_f \sin \delta_f}{I_z}
 \end{array} \right. \quad (53)$$

Il est important de souligner que le modèle 4-roues se limite aux équations dynamiques longitudinale  $\dot{v}_x$ , latérale  $\dot{v}_y$ , de lacet  $\dot{\psi}$  et de roulis  $\dot{\theta}$ .

Lors de sollicitation du véhicule dans des zones de comportement non linéaire, les modèles bicyclettes ne sont plus suffisants pour modéliser le comportement dynamique du véhicule. Les modèles de type 4-roues sont plus représentatifs pour de fortes sollicitations mais sont peu utilisés lors de la conception des applications automobiles embarquées à cause de leur complexité. En revanche, ils sont largement utilisés pour simuler le comportement du véhicule lors de la validation d'algorithmes embarqués.



---

## Références

- [1] Jazar, Reza N., "Vehicle Dynamics" 2014
- [2] Rajesh Rajamani, "Vehicle Dynamics and Control" 2012
- [3] W. Hirschberg, G. Rill and H. Weinfurter "Tire model TMeasy", Taylor Francis 2007
- [4] Simon Eliakim Mustaki. Outils de pré-calibration numérique des lois de commande de systèmes : application aux aides à la conduite et au véhicule autonome. Automatique. Ecole nationale supérieure Mines-Télécom Atlantique, 2019.
- [5] Soheib Fergani. Robust multivariable control for vehicle dynamics. Université de Grenoble, 2014.
- [6] Gillespie, Fundamentals of Vehicle Dynamics. Society of Automotive Engineers, Warrendale (1992).
- [7] Mathieu Deremetz, Contribution à la modélisation et à la commande de robots mobiles autonomes et adaptables en milieux naturels. Automatique / Robotique. Université Clermont Auvergne, (2018).